SUBJECT:

مثال: في R

$A = \{1, 2, 3\}$

1 2 3

في R تكون النقطة داخلية في مجموعة ما إذا انتمت إلى هذه المجموعة مع ومجال مفتوح مركزه هذه النقطة.

المجموعة A لا تحوي مجالات بل تحوي ثلاث نقاط وبالتالي لا تحوي أي نقطة داخلية.

مثال: في Z

-2 -1 0 1 2

مجموعة الأعداد الصحيحة Z لا تحوي نقاط داخلية.

في Q

لا تحوي مجالات وبالتالي لا تحوي أي نقطة داخلية.

ملاحظة: أي مجال مفتوح يحوي ما لانهاية من الأعداد العادية وما لانهاية من الأعداد غير العادية.

تعريف: نسمي المجموعة A من الفضاء المتري (X, d) مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية.

مثال: في R

المجموعة المنتهية مجموعة غير مفتوحة لأن نقاطها غير داخلية.

" " " " " " " " Q

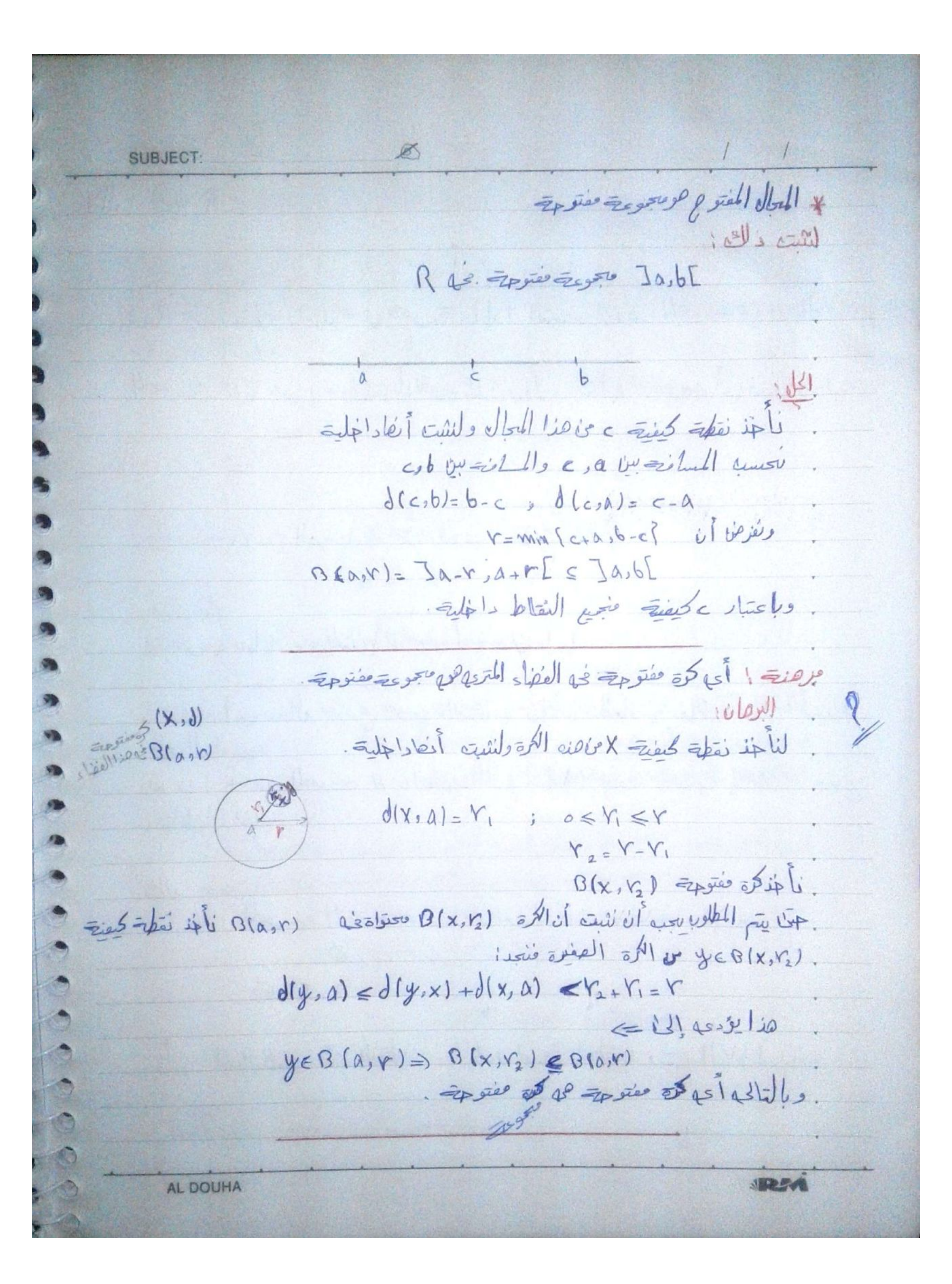
$I = [a, b]$

a b

نأخذ المجال المغلق لأن النقطتين a, b ليستا داخليتين وبقية النقاط داخلية.

المجال نصف المفتوح هو مجموعة غير مفتوحة

a



SUBJECT: / /

* المجال المفتوح هو مجموعة مفتوحة

لنثبت ذلك :

$]a,b[$ مجموعة مفتوحة في R

الحل :

نأخذ نقطة كيفية c من هذا المجال ولنثبت أنها داخلية

نحسب المسافة بين a و c والمسافة بين b و c

$d(c,a) = c-a$ و $d(c,b) = b-c$

ونفرض أن $r = \min\{c+a, b-c\}$

$B(a,r) =]a-r ; a+r[\subseteq]a,b[$

وباعتبار c كيفية فجميع النقاط داخلية.

مبرهنة : أي كرة مفتوحة في الفضاء المتري هو مجموعة مفتوحة.

البرهان :

(X,d)

$B(a,r)$ كرة مفتوحة في هذا الفضاء

لنأخذ نقطة كيفية X من هذه الكرة ولنثبت أنها داخلية.

$d(x,a) = r_1 \quad ; \quad 0 \leq r_1 \leq r$

$r_2 = r - r_1$

نأخذ كرة مفتوحة $B(x, r_2)$

حتى يتم المطلوب يجب أن نثبت أن الكرة $B(x,r_2)$ محتواة في $B(a,r)$ نأخذ نقطة كيفية

$y \in B(x,r_2)$ من الكرة الصغيرة فنجد :

$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r_2 + r_1 = r$

هذا يؤدي إلى $\Leftarrow$

$y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,r_2) \subseteq B(a,r)$

وبالتالي أي كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

مبرهنة: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d) تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت تساويه اجتماعاً لكرات مفتوحة.

البرهان:

⇐ لزوم الشرط: نفرض أن A مفتوحة (كل نقاطها داخلية).

ولتكن $x \in A$ فتكون x نقطة داخلية.

وبالتالي توجد كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r.

$$B(a, r_x) \subseteq A$$

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A$$ أي المجموعة عبارة عن اجتماع عناصرها

⇒ كفاية الشرط:

سنثبت أن A تساويه اجتماع لكرات مفتوحة.

فإذا أخذنا أي نقطة من A ستكون حتماً في إحدى الكرات المفتوحة وبالتالي ستكون نقطة داخلية أي أن جميع النقاط داخلية وبالتالي الكرة مفتوحة.

نتيجة: أي اجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

البرهان: لنفرض أن

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

سنثبت أن اجتماع أي مجموعة مفتوحة

إن A هو اجتماع لمجموعات كل منها هو اجتماع ~~لكرات~~ لمجموعات مفتوحة حسب مبرهنة سابقة بالتالي أن A مجموعة لكرات مفتوحة.

مبرهنة: تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

البرهان:

لتكن $U_1, U_2, ___ U_n$ أسرة منتهية من المجموعات المفتوحة

في الفضاء المتري (X,d)

المطلوب: إثبات أن $U=\bigcap_{i=1}^{n} U_i$

نأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع

$x \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow x \in U_i \; (i=1, ___, n)$

و U_i مجموعة مفتوحة وبالتالي x نقطة داخلية في هذه المجموعة.

$\exists \quad B(x, r_i) \subseteq U_i$

نفرض $r=\min(r_1, r_2, _ r_n)$ عندها

$B(x,r) \subseteq U_i \Rightarrow B(x,r) \subseteq \bigcap U_i = U$

إذاً x نقطة داخلية بالتقاطع.

ملاحظة: إن تقاطع عدد غير منتهٍ من المجموعات المفتوحة ليس بالضرورة أن يكون مجموعة منتهية.

ويوضح ذلك المثال التالي.

لنأخذ في R أسرة المجالات المفتوحة

$\{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\}$

$1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\} = \{0\}$

حصلنا على نقطة والنقطة ليست مجموعة مفتوحة في R.

تمرين: (X,d) X مجموعة مفتوحة، لذلك $B(x,r)$

تمرين: المجموعة الخالية مجموعة مفتوحة.

نعلم أن المجموعة المفتوحة هي جميع نقاطها داخلية وبما أنها خالية فهي لا تحوي

SUBJECT:

على أي نقطة.

دورة 2017

* الخواص الأساسية للمجموعات المفتوحة:

1- أي اجتماع لمجموعة مفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

2- تقاطع عدد منته للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

3- المجموعتان X و ϕ الكلية والخالية هما مجموعتان مفتوحة.

* إن هذه الخواص كانت الأساس الذي تم الانطلاق منه لتعريف الطبولوجيا والفضاء الطبولوجي.

تعريف الفضاء الطبولوجي:

لتكن X مجموعة ما، τ أسرة من المجموعات الجزئية لـ X نسمي الأسرة τ طبولوجيا على X إذا حققت الشروط التالية:

1- أي اجتماع لعناصر من τ هو عنصر من τ

2- تقاطع عدد منته من τ هو عنصر من τ

3- X و ϕ عنصران من τ.

إن المجموعة X مع الأسرة τ تشكل فضاء طبولوجي (X, τ)

عناصر τ نسميها تعريف مجموعات مفتوحة.

ومن هذا التعريف ينتج أن كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي حيث الطبولوجيا هنا مولدة بواسطة المسافة.